

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТЕЛ И ЭКРАНОВ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Математическое моделирование процесса дифракции электромагнитных волн на экранах и телах различной формы является важным аспектом в современной электродинамике. Целью данной работы является исследование задачи дифракции электромагнитных волн на системе пересекающихся тел и экранов сложной формы численным методом.

Материалы и методы. Рассматривается метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на системе тел и экранов сложных форм. Поставленная задача дифракции представлена в виде системы интегродифференциальных уравнений. Полученная система решена проекционным методом. Представлены численные результаты.

Результаты. Визуализировано поведение отраженного поля, полученное математическим моделированием, от систем пересекающихся тел и экранов. Разработаны программа и алгоритм, позволяющие определять модули решения системы интегродифференциальных уравнений, к которым сведена задача дифракции электромагнитной волны.

Выводы. Разработанные программы и алгоритмы могут быть использованы при решении векторных задач электродинамики и при математическом моделировании сложных электродинамических процессов и объектов, например, при решении задач дифракции в резонансных диапазонах частот.

Ключевые слова: задача дифракции, система интегродифференциальных уравнений, метод Галеркина, сеточные базисные функции, обобщенная расчетная сетка.

М. А. Moskaleva

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION PROBLEMS ON THE SYSTEM OF CROSSING BODIES AND SCREENS

Abstract.

Background. Mathematical modeling of diffraction of electromagnetic waves on screens and bodies of various forms is an important aspect in modern electrodynamics. The goal of this work is to research a problem of electromagnetic wave diffraction on a system of crossing bodies and screens of irregular shapes by the numerical method.

Materials and methods. The method for solving the electromagnetic wave diffraction problem on the system of bodies and screens of irregular shapes was considered. The set problem was represented as a system of integro-differential equations. This system was solved by the projection method. The numerical results are presented.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант в рамках Госзадания № 2.1102.2014/К).

Results. The authors visualized the behavior of the incident field, resulting in mathematical modeling of the system of crossing bodies and screens. The developed program and algorithm allow to define a system of integro-differential equation solution modulus to which the electromagnetic wave diffraction problem is reduced.

Conclusions. The developed program and algorithm can be used for solution of vector problems of electrodynamics and mathematical modeling of electrodynamic process and objects, for example, diffraction problem solution in resonant frequency bands.

Key words: diffraction task, system of integro-differential equations, Galerkin method, grid basis function, generalized computational grid.

1. Постановка задачи

Пусть в пространстве R^3 расположена система тел Q_i и экранов Ω_j ($i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$). Пример показан на рис. 1.

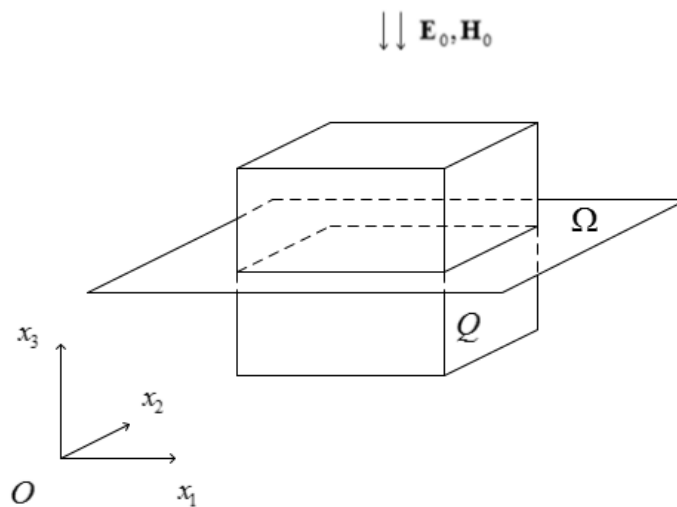


Рис. 1

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на данной системе тел и экранов. Обозначим объединение конечного числа экранов Ω_j следующим образом:

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j.$$

При этом Ω_j представляют собой связные ориентируемые незамкнутые и непересекающиеся ограниченные поверхности класса C^∞ в R^3 .

Граница $\partial\Omega_j := \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличных от нулевого; $\partial\Omega := \bigcup_j \partial\Omega_j$. Предполагаем, что экраны являются идеально проводящими.

Определим также трубчатые окрестности $\partial\Omega_\delta$ края экрана:

$$\partial\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Предполагаем, что Q_i – ограниченные области, границы которых $\partial Q_i = \bar{Q}_i \setminus Q_i$ – кусочно-гладкие замкнутые ориентируемые поверхности, состоящие из конечного числа поверхностей класса C^1 . Определим $Q := \bigcup_i Q_i$. Будем полагать, что тела Q_i имеют диэлектрическую проницаемость $\hat{\epsilon}(x)$.

В исследуемой системе тела и экраны пересекаются, т.е. $\bar{Q} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ с гармонической зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$ на системе тел и экранов. Источником падающего поля может быть, например, ток $\mathbf{j}_{0,E}$.

Ниже P^+ , P^- – произвольные области, внешняя и внутренняя соответственно к Ω и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$.

Требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющее:

– уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad \text{в } ((\partial Q \cup \bar{\Omega})^c); \quad (1)$$

– условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]_{\partial Q} = 0; \quad (2)$$

– краевым условиям на поверхности экрана Ω (за исключением точек края экрана):

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0; \quad (3)$$

– условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) = H_{loc}^0(\mathbb{R}^3); \quad (4)$$

– условиям Сильвера – Мюллера:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= o(1/r), & \text{Im } k > 0 \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s &= o(1/r), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_s &= o(1/r), \quad r \rightarrow \infty. \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= O(1/r), & \text{Im } k = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

для рассеянного поля

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0 \quad (r = |x|, \quad \mathbf{e}_r = x/|x|).$$

Постановка задачи дифракции электромагнитной волны для случая системы непересекающихся тел и экранов и описание свойств уравнений электрического поля подробно представлено в [1].

2. Интегродифференциальные уравнения задачи дифракции

Перейдем к системе интегродифференциальных уравнений электрического поля сформулированной задачи дифракции. Согласно формулам из [2] получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} & \xi \mathbf{J} - \left(k_0^2 + \text{grad div} \right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \\ & - \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau \right) \int_\Omega G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q; \\ & \left(- \left(k_0^2 + \text{grad div} \right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \right. \\ & \left. - \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau \right) \int_\Omega G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{|x-y|}$ – известная функция Грина.

Перепишем систему интегродифференциальных уравнений в операторном виде:

$$L\mathbf{V} = \mathbf{f}, \quad (7)$$

$$\text{здесь } L = \begin{pmatrix} L^{11} & L^{12} \\ L^{21} & L^{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{J}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ -\mathbf{E}_{0,\tau} \end{pmatrix}.$$

Ниже описан численный метод решения этой системы уравнений.

3. Дискретизация задачи

Будем решать задачу методом Галеркина. Для этого построим равномерную расчетную сетку на системе тел и экранов. Пусть рассматриваемая система состоит из плоского экрана Ω , имеющего прямоугольную форму, и тела Q , являющегося прямоугольным параллелепипедом. Разобьем экран и тело на элементарные ячейки – конечные элементы. Для плоского экрана конечные элементы представляют собой прямоугольники, а для тела – прямоугольные параллелепипеды.

Определим сеточные базисные функции на экране и теле. На экране введем функции *rooftop* по методу, предложенному в статье [3]. Данная функция $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$, отвечающая ребру i , определяется по правилу

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 - x_{1,i-1}, x_2 - x_{2,i-1}, x_3 - x_{3,i-1}) \frac{l_i}{S_i^+} & \text{в } P_i^+, \\ (x_{1,i+1} - x_1, x_{2,i+1} - x_2, x_{3,i+1} - x_3) \frac{l_i}{S_i^-} & \text{в } P_i^-, \end{cases} \quad (8)$$

где l_i является длиной ребра i ; S^+ и S^- есть площади P^+ и P^- соответственно (рис. 2).

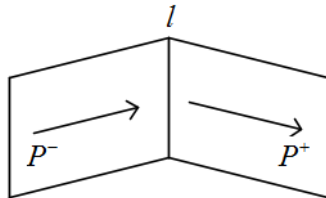


Рис. 2

На теле введем базисные функции «крышки» [4], пусть $h^j := |x_{j,k} - x_{j,k-1}|$ (где $j = 1, \dots, 3$), тогда получим формулы для ψ_{klm}^j :

$$\psi_{klm}^j(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^j} |x_j - x_{j,k}|, & x \in \bar{\Pi}_{klm}^j, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}^j. \end{cases} \quad (9)$$

Пример базисных функций на теле изображен на рис. 3.

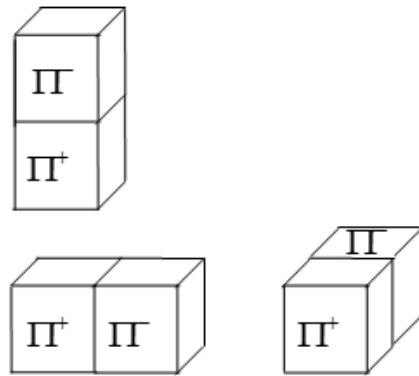


Рис. 3

Применяя метод Галеркина к системе (6), приходим к решению матричного уравнения

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

здесь $\mathbf{u}$ – столбец неизвестных коэффициентов при базисных функциях; $\mathbf{L}$ – основная матрица СЛАУ; $\mathbf{f}$ – столбец правой части.

Основная матрица имеет блочный вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{11} & \mathbf{L}^{12} \\ \mathbf{L}^{21} & \mathbf{L}^{22} \end{pmatrix}.$$

Блоки матрицы, расположенные по главной диагонали, соответствуют решению задачи дифракции только на теле и только на экране.

4. Численное решение. Результаты расчетов

Рассмотрим систему Θ (см. рис. 1), в которой экран Ω имеет прямоугольную форму размером $\lambda \times \lambda$, а тело Q является прямоугольным параллелепипедом размером $\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{2}$. Экран расположен в плоскости Ox_1x_2 , $x_3 = 0$. Центр тела совпадает с центром системы координат. Таким образом,

$$\Omega = \left\{ x \in R^3 : x_1, x_2 \in \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right); x_3 = 0 \right\},$$

$$Q = \left\{ x \in R^3 : x_i \in \left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4} \right) \right\}, i = 1, 2, 3.$$

Пусть падающее поле распространяется гармонически и направлено вдоль оси Ox_2 , диэлектрическая проницаемость тела постоянна и определяется параметром $\xi = 3\pi$. В этом случае результат решения задачи представлен на рис. 4–9. Рисунок 4 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_1 .

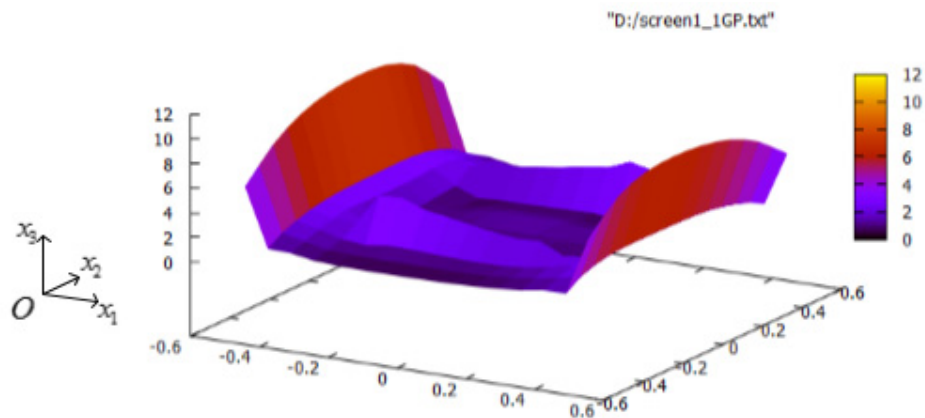


Рис. 4. Распространение поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_1

В соответствии с теорией нормальная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_1 , стремится к нулю, касательная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_2 , неограниченно возрастает.

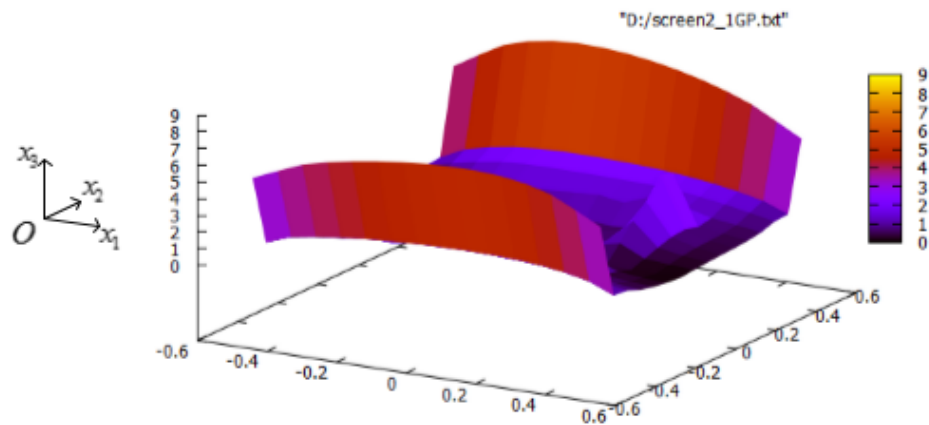


Рис. 5. Распространение поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_2

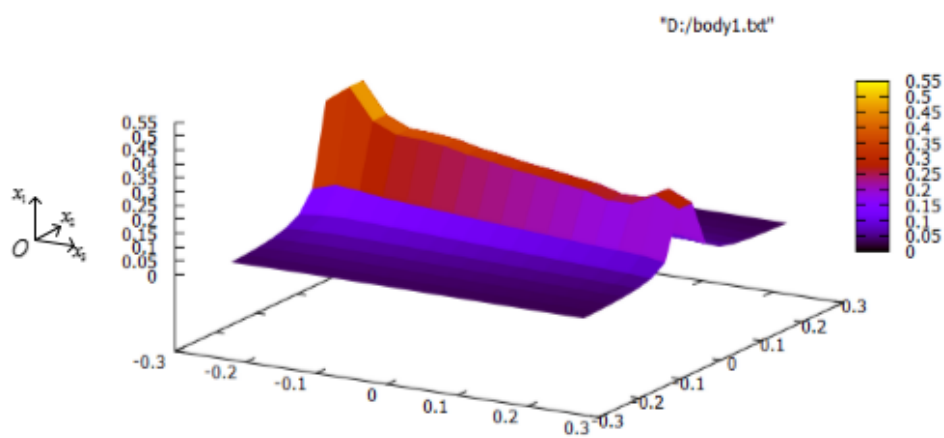


Рис. 6. Распространение поля внутри тела на первом слое расчетной сетки

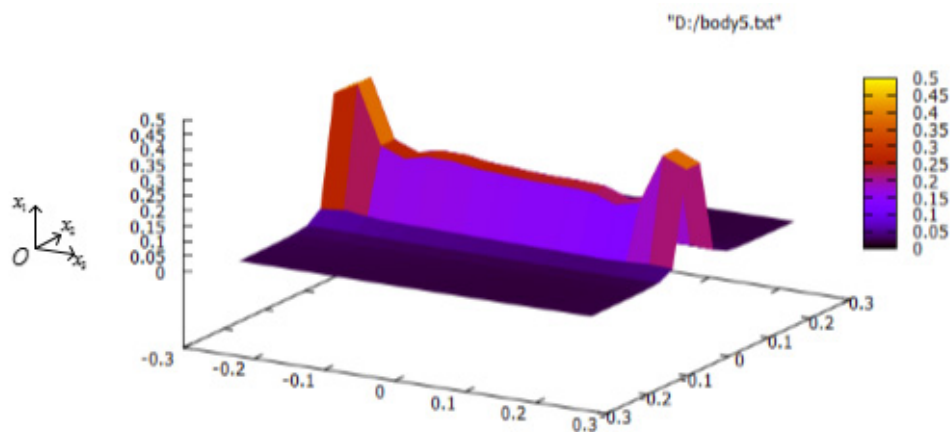


Рис. 7. Распространение поля внутри тела на пятом слое расчетной сетки

Рисунок 5 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_2 .

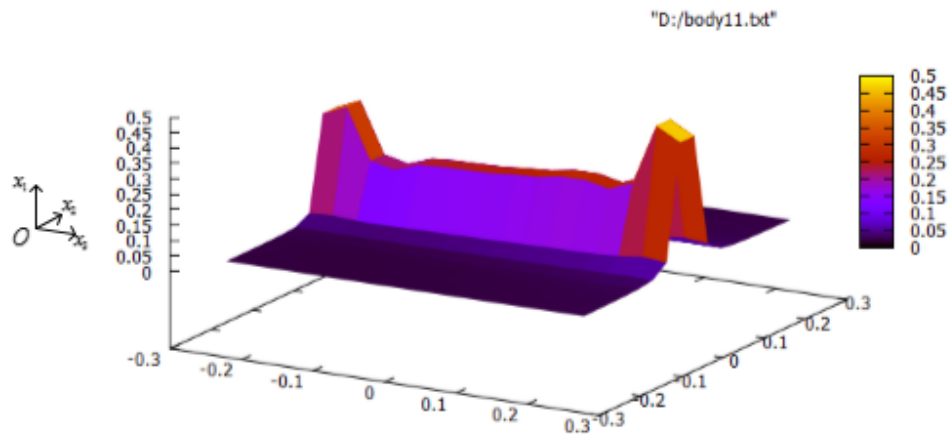


Рис. 8. Распространение поля внутри тела на одиннадцатом слое расчетной сетки

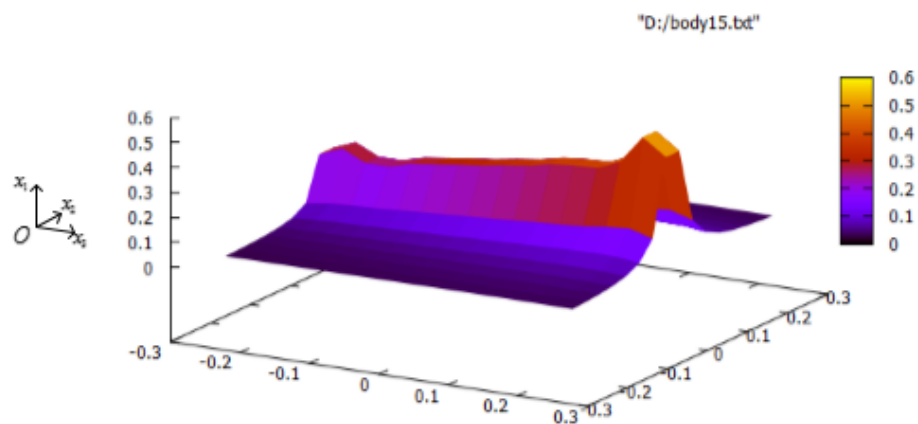


Рис. 9. Распространение поля внутри тела на пятнадцатом слое расчетной сетки

В соответствии с теорией нормальная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_2 , стремится к нулю, касательная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_1 , неограниченно возрастает.

Рисунок 6 иллюстрирует распространение поля внутри тела на первом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{32}$. Рисунок 7 иллюстрирует распространение поля внутри тела на пятом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{5\lambda}{32}$.

Рисунок 8 иллюстрирует распространение поля внутри тела на одиннадцатом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{11\lambda}{32}$. Рисунок 9 иллюстрирует распространение поля

внутри тела на пятнадцатом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{15\lambda}{32}$.

Наблюдается симметрия в характере распространения поля внутри тела на слоях расчетной сетки – первый слой симметричен пятнадцатому (последнему) слою, пятый – одиннадцатому и т.д.

Рассмотрим систему $\hat{\Theta}$, в которой экран Ω имеет прямоугольную форму размером $\lambda \times \lambda$, а тело Q является прямоугольным параллелепипедом размером $\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{2}$. Экран расположен в плоскости Ox_1x_2 , $x_3 = \frac{\lambda}{4}$. Центр тела совпадает с центром системы координат. Таким образом,

$$\Omega = \left\{ x \in R^3 : x_1, x_2 \in \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right); x_3 = \frac{\lambda}{4} \right\},$$

$$Q = \left\{ x \in R^3 : x_i \in \left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4} \right) \right\}, i = 1, 2, 3.$$

Система $\hat{\Theta}$ представлена на рис. 10.

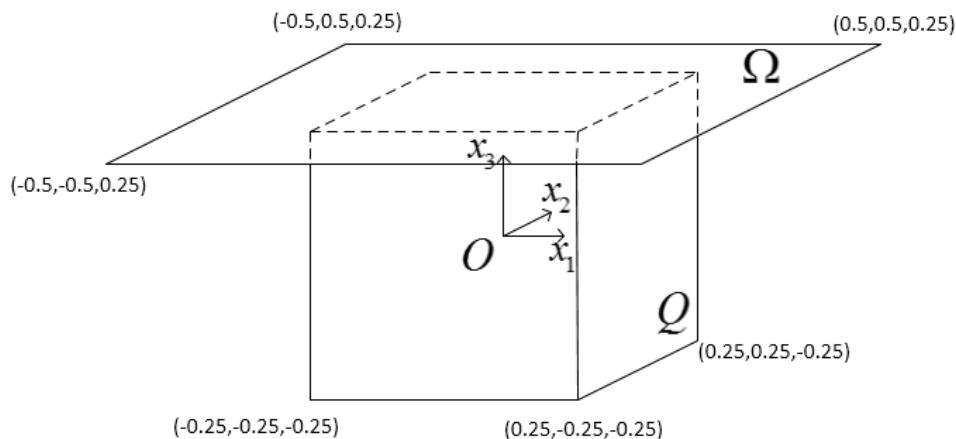


Рис. 10. Система $\hat{\Theta}$

Пусть падающее поле распространяется гармонически и направлено вдоль оси Ox_2 , диэлектрическая проницаемость тела постоянна и определяется параметром $\xi = 3\pi$.

В этом случае результат решения задачи представлен на рис. 11–16. Рисунок 11 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_1 . В соответствии с теорией нормальная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_1 , стремится к нулю, касательная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_2 , неограниченно возрастает.

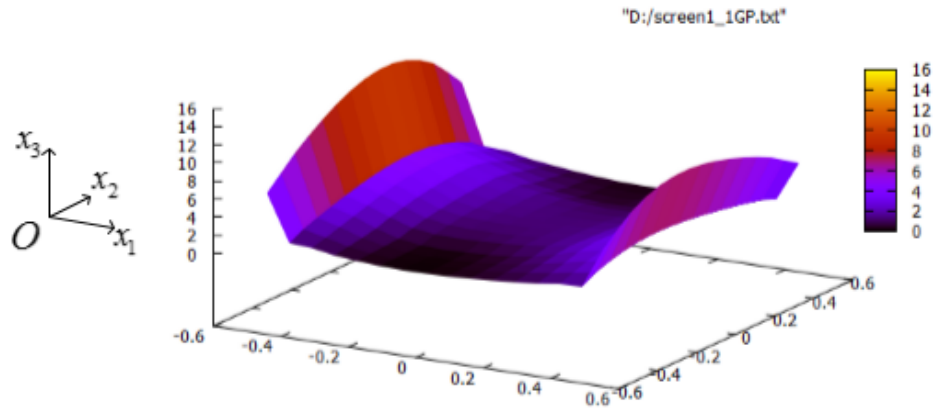


Рис. 11. Распространение поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_1

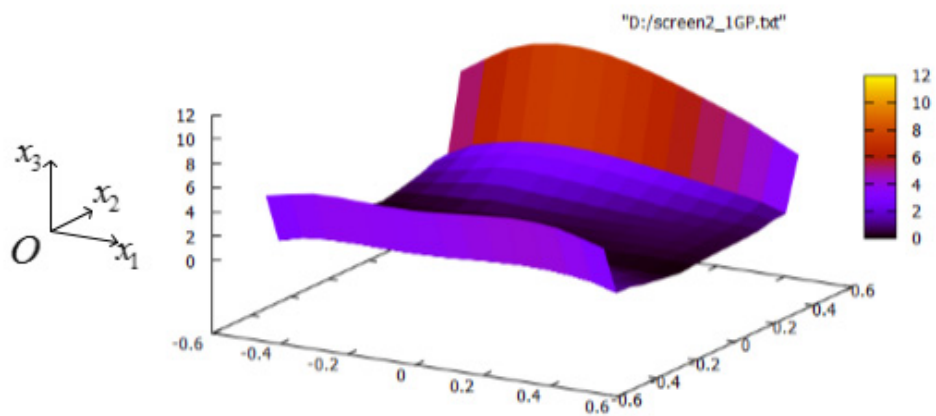


Рис. 12. Распространение поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_2

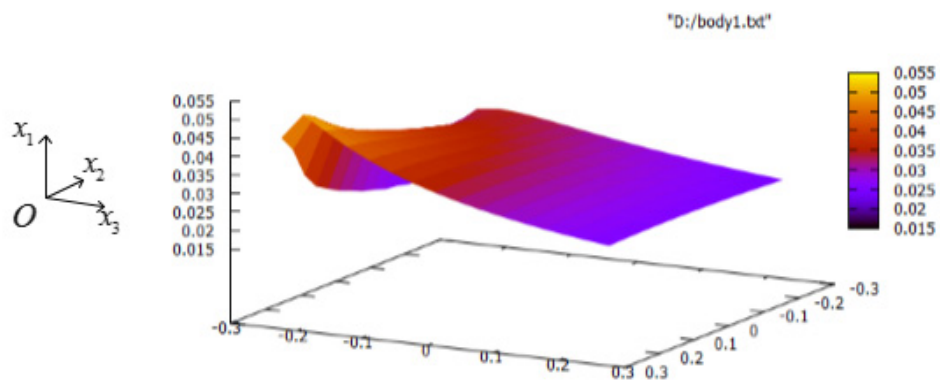


Рис. 13. Распространение поля внутри тела на первом слое расчетной сетки

Рисунок 12 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль оси Ox_2 .

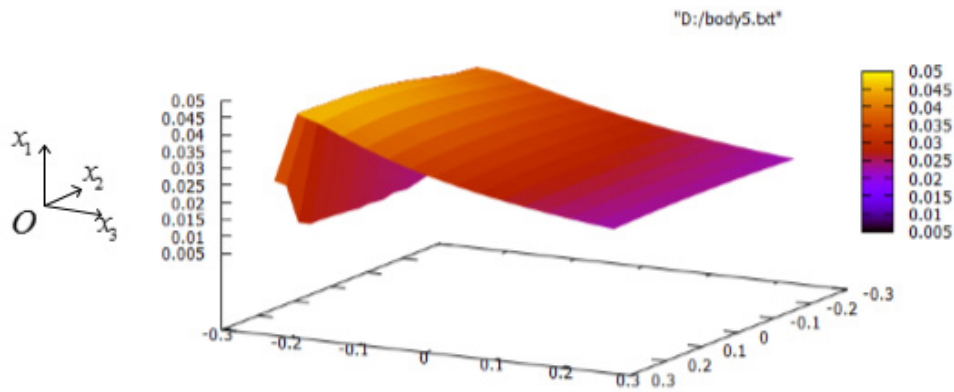


Рис. 14. Распространение поля внутри тела на пятом слое расчетной сетки

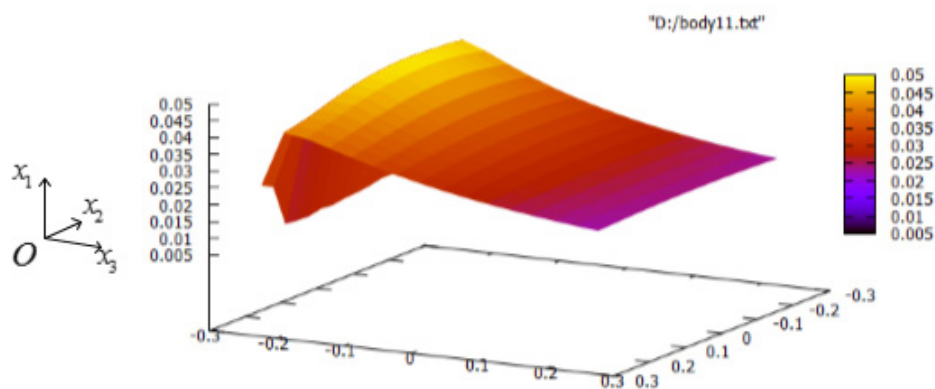


Рис. 15. Распространение поля внутри тела на одиннадцатом слое расчетной сетки

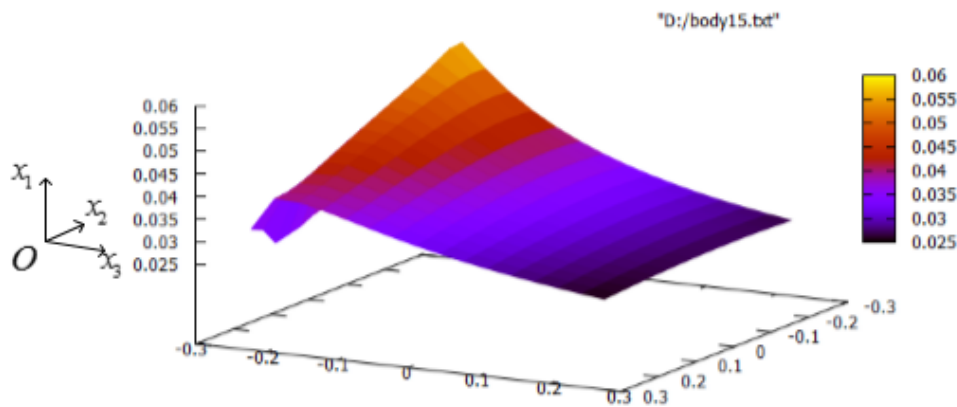


Рис. 16. Распространение поля внутри тела на пятнадцатом слое расчетной сетки

В соответствии с теорией нормальная компонента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_2 , стремится к нулю, касательная компо-

нента поверхностных токов, расположенная вдоль оси Ox_1 , неограниченно возрастает.

Рисунок 13 иллюстрирует распространение поля внутри тела на первом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{32}$. Рисунок 14 иллюстрирует распространение поля внутри тела на пятом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{5\lambda}{32}$. Рисунок 15 иллюстрирует распространение поля внутри тела на одиннадцатом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{11\lambda}{32}$. Рисунок 16 иллюстрирует распространение поля внутри тела на пятнадцатом слое расчетной сетки, расположенном перпендикулярно оси Ox_1 , при $x_1 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{15\lambda}{32}$.

При помощи субиерархического метода [5] из данных систем тел и экранов исключили поочередно тело и экран. Результаты, полученные в ходе решения задачи, совпадают с результатами, полученными только на теле [6] и на экране [2].

Список литературы

1. **Smirnov, Yu. G.** Integrodifferential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // *Advances in Mathematical Physics*. – 2015. – Vol. 2015. – 6 p.
2. **Максимова, М. А.** Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов / М. А. Максимова, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2014. – № 3 (31). – С. 114–133.
3. **Hänninen, I.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions / I. Hänninen, M. Taskinen, and J. Sarvas // *Prog. Electromagn. Res. PIER*. – 2006. – Vol. 63. – P. 243–278.
4. **Смирнов, Ю. Г.** Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2004. – Т. 44, № 12. – С. 2264–2274.
5. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // *Радиотехника и электроника*. – 2008. – № 4. – С. 441–446.
6. **Medvedik, M. Yu.** Volume Singular Integral Equation Method for Solving Problems of Diffraction of Electromagnetic Waves by a Dielectric Inhomogeneous Body in a Rectangular Waveguide / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov // *Forum for Electromagnetic Research Methods and Application Technologies (FERMAT)*. – 2014. – Vol. 2, № 5. – P. 1–5.

References

1. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Advances in Mathematical Physics*. 2015, vol. 2015, 6 p.

2. Maksimova M. A., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 114–133.
3. Hänninen I., Taskinen M. and Sarvas J. *Prog. Electromagn. Res. PIER*. 2006, vol. 63, pp. 243–278.
4. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2004, vol. 44, no. 12, pp. 2264–2274.
5. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2008, no. 4, pp. 441–446.
6. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Forum for Electromagnetic Research Methods and Application Technologies (FERMAT)*. 2014, vol. 2, no. 5, pp. 1–5.

Москалева Марина Александровна

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: m.a.moskaleva1@gmail.com

Moskaleva Marina Aleksandrovna

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.3

Москалева, М. А.

Исследование задачи дифракции электромагнитной волны на системе пересекающихся тел и экранов / М. А. Москалева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1 (37). – С. 37–49.